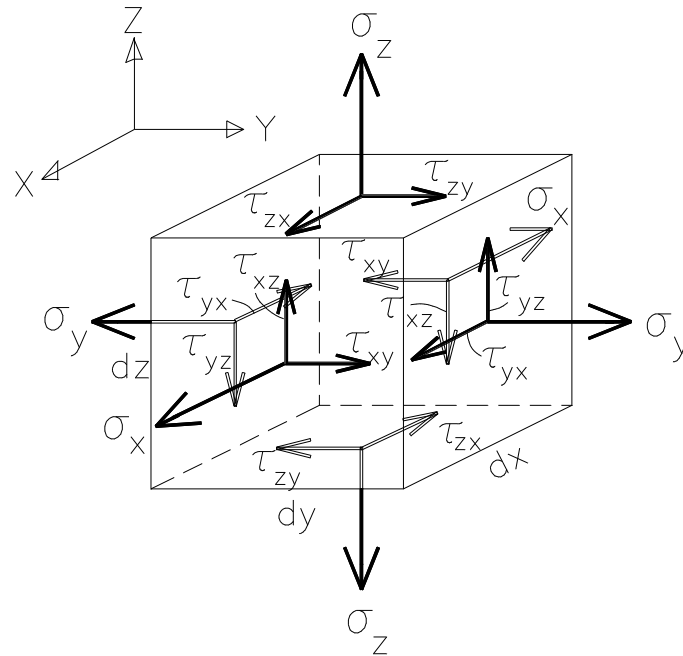


STANY NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

Analiza stanu naprężenia:



Stan naprężenia jest określony sześcioma składowymi:

naprężenia normalne: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$

naprężenia styczne: $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}.$

W celu zachowania równowagi sześcienniej kostki, naprężenia styczne na wzajemnie prostopadłych płaszczyznach są sobie równe (**twierdzenie o równości naprężeń stycznych**):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

STANY NAPRĘŻENIA:

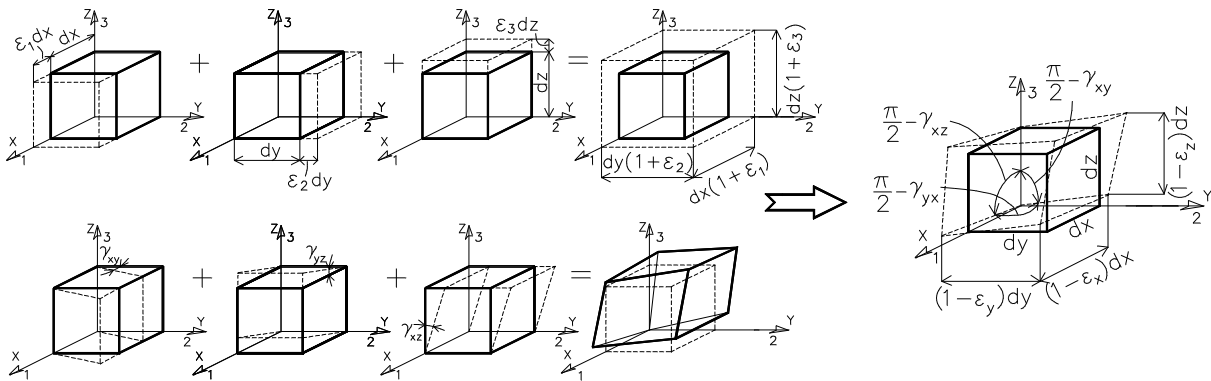
- Jednoosiowy stan naprężenia: $\sigma_x \neq 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$
- Płaski stan naprężenia: $\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \tau_{xy} \neq 0, \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$
- Przestrzenny stan naprężenia.

Analiza stanu odkształcenia

Stan odkształcenia jest określony sześcioma składowymi:

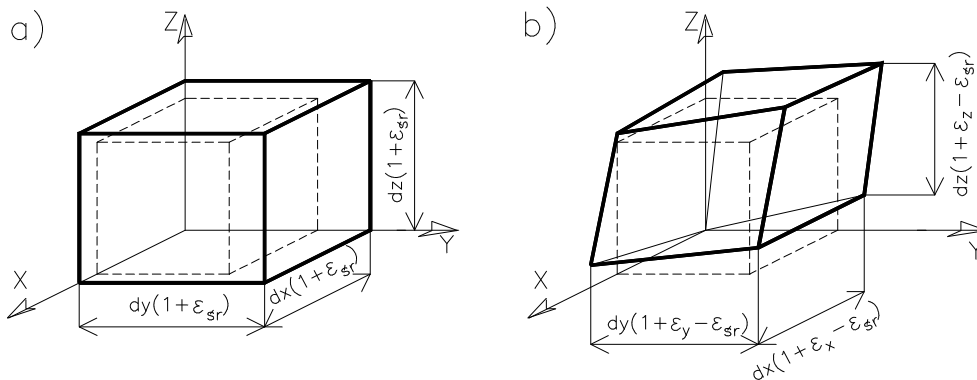
wydłużenia liniowe: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
 kąty odkształcenia postaciowego: $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zx}$

Poniższy rysunek pokazuje odkształcenia sześcienniej kostki pod działaniem wydłużeń liniowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (indeksy 1, 2 i 3 oznaczają pominięcie odkształceń kątowych) oraz w dolnym wierszu odkształceń postaciowych γ w trzech płaszczyznach..



STANY ODKSZTAŁCENIA:

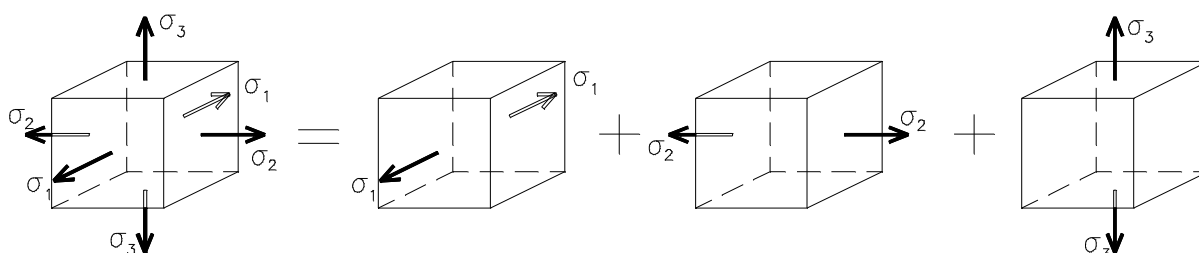
- Odkształcenia czysto objętościowe.
- Odkształcenia czysto postaciowe.



Odkształcenie: a) czysto objętościowe, b) czysto postaciowe

Związki między stanem odkształcenia i stanem naprężenia

Dla sześcianu na który działają tylko naprężenia normalne (zwane **naprężeniami głównymi** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dla podkreślenia, że pomija się wszystkie naprężenia styczne τ i stan odkształceń jest czysto objętościowy), wydłużenia liniowe w kierunku trzech osi XYZ wynoszą:



Trójwymiarowy stan naprężeń głównych

Zgodnie z zasadą superpozycji i prawem Hooke'a wydłużenia liniowe w poszczególnych kierunkach wynoszą:

– kierunek 1:	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E},$	$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_1}{E},$	$\varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 = -\nu \frac{\sigma_1}{E},$
– kierunek 2:	$\varepsilon_1 = -\nu\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_2}{E},$	$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E},$	$\varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_2}{E},$
– kierunek 3:	$\varepsilon_1 = -\nu\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_3}{E},$	$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_3}{E},$	$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}.$

Po zastosowaniu zasady superpozycji, wydłużenia liniowe wynoszą:

$$\varepsilon_1 = +\frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Ponieważ odkształcenia kątowe nie mają wpływu na wydłużenia liniowe, powyższe zależności można uogólnić dla dowolnego stanu:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].\end{aligned}$$

Dla odkształceń czysto postaciowych można wyprowadzić kolejne zależności pomiędzy składowymi stanu naprężenia i stanu odkształcenia:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Powyższe zależności określają **prawo Hooke'a dla czystego ścinania**.

Współczynnik G nosi nazwę modułu ścinania (modułu odkształcenia postaciowego, modułu Kirchhoffa):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad [\text{MPa}].$$

Moduł ścinania G jest obok modułu Younga E i liczby Poissona trzecią stałą sprężystą opisującą właściwości materiału.

UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE'A

Dla idealnie sprężystego materiału izotropowego zależności między składowymi stanu odkształcenia i składowymi stanu naprężenia noszą nazwę **uogólnionego prawa Hooke'a**. Składowe stanu odkształcenia jako funkcje składowych stanu naprężenia wyrażone są zależnościami:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}$$

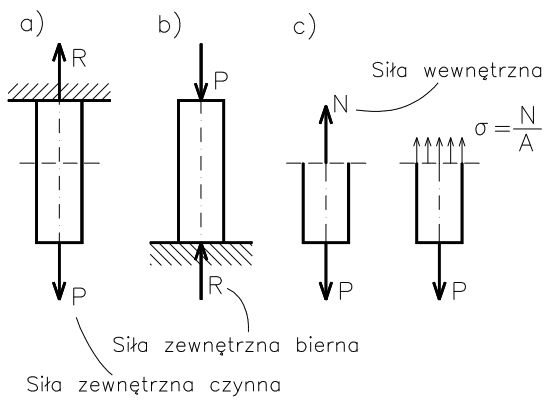
Rozwiązując ten układ równań, można określić składowe stanu naprężenia jako funkcje składowych stanu odkształcenia:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right], & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned}$$

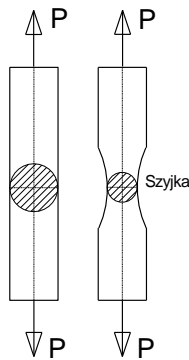
Przedstawione wyżej zależności znajdują zastosowanie przede wszystkim w **tensometrii**, doświadczalnym dziale wytrzymałości materiałów, zajmującym się pomiarem składowych stanu odkształcenia i obliczaniem na tej podstawie wartości składowych stanu naprężenia.

Składowe stanu naprężenia są stosowane w warunku wytrzymałościowym, wykorzystując **hipotezę wytrzymałościową**, umożliwiającą analizę złożonych stanów naprężenia (tzn. na projektowanie i obliczenia wytrzymałościowe dominujących w wytrzymałości materiałów przypadków wytrzymałości złożonej).

Uogólnione prawo Hooke'a pozwala zrozumieć szereg zjawisk związanych z odkształceniami elementów konstrukcyjnych. Odkształcenia próbki podczas statycznej próby rozciągania oraz płaski stan naprężenia przedstawiono w poniższej tabeli.



Statyczna próba rozciągania:



Jednoosiowe rozciąganie (statyczna próba rozciągania):

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

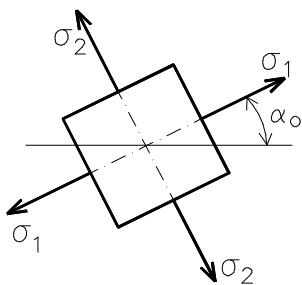
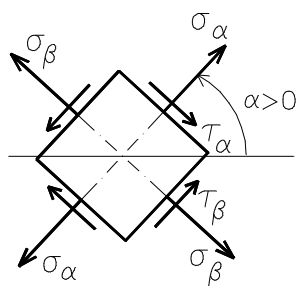
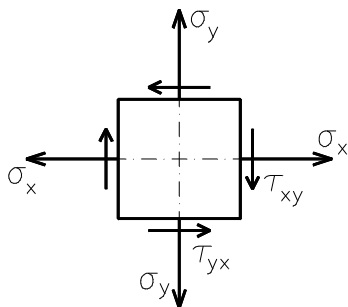
Z uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x],$$

Klasyczna
postać
prawa Hooke'a

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\nu\sigma_x], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu\sigma_x].$$

Jednoosiowemu rozciąganiu towarzyszy trójwymiarowy stan odkształceń – stąd można wyjaśnić powstawanie szyjki w rozciąganej próbce po przekroczeniu granicy plastyczności.



Płaski stan naprężenia:

$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \tau_{xy} \neq 0,$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Z uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y],$$

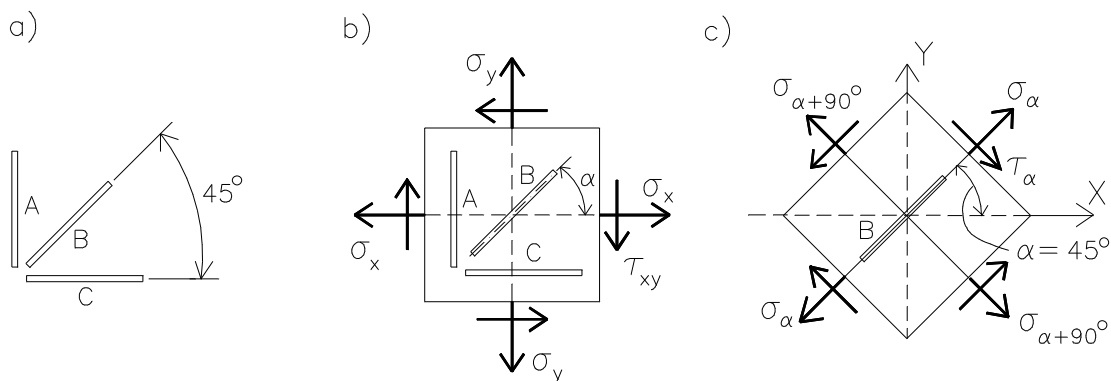
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Płaski stan naprężenia tworzy trójwymiarowy stan odkształcenia (podobnie – płaski stan odkształcenia tworzy trójwymiarowy stan naprężenia).

ZASTOSOWANIE UOGÓLNIENEGO PRAWA HOOKE'A W TENSOMETRII

Na powierzchni sprężystego ciała ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$) dokonano tensometrycznego pomiaru wydłużeń względnych w kierunkach A, B, C i uzyskano: $\varepsilon_A = 1,36\text{‰}$, $\varepsilon_B = 0,24\text{‰}$, $\varepsilon_C = -0,85\text{‰}$. Wyznaczyć składowe stanu naprężenia oraz wartości i kierunki naprężeń głównych.



Rozeta tensometryczna, płaski stan naprężenia

Na powierzchni ciała występuje płaski stan naprężenia. Rysunek przedstawia typową **rozetę tensometryczną**, umożliwiającą pomiar odkształceń liniowych w trzech kierunkach (kąt $\alpha = 45^\circ$). Po przyjęciu układu osi XY i określeniu składowych stanu naprężenia dla tego układu (rys. b) można z uogólnionego prawa Hooke'a dla płaskiego stanu określić wartości naprężeń normalnych:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_C + \nu\varepsilon_A) = \\ &= \frac{2,1 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (-0,85 + 0,3 \cdot 1,36) \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{-102 \text{ MPa}}}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_A + \nu\varepsilon_C) = \\ &= \frac{2,1 \cdot 10^5}{1-0,3^2} (1,36 + 0,3(-0,85)) \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{255 \text{ MPa}}}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia naprężenia stycznego należy skorzystać ze schematu przedstawionego na rys. c. Wydłużenie w kierunku tensometru B wynosi

$$\varepsilon_B = \varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \nu\sigma_{\alpha+90^\circ}).$$

Naprężenia normalne dla kierunku $\alpha = 45^\circ$ określa się następująco:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \cdot 45^{\circ}) - \tau_{xy} \sin(2 \cdot 45^{\circ}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy},$$

$$\sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \cdot 45^{\circ}) + \tau_{xy} \sin(2 \cdot 45^{\circ}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy}.$$

Po wprowadzeniu tych zależności do wzoru na ε_B i po uporządkowaniu otrzymuje się zależność pozwalającą obliczyć wartość naprężeń stycznych:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y - 2\varepsilon_{\alpha})$$

Po wstawieniu danych liczbowych

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1-\nu)} (\varepsilon_C + \varepsilon_A - 2\varepsilon_B) = \\ &= \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1-0,3)} (-0,85 + 1,36 - 2(-0,24)) \cdot 10^{-3} = 148,5 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Kierunki naprężeń głównych oblicza się ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 148,5}{-102 - 255} = 0,8319 \rightarrow \alpha_0 \cong 20^{\circ}.$$

Ponieważ $\sigma_x < \sigma_y$, kąt α_0 wyznacza kierunek naprężenia σ_2 . Naprężenia główne wynoszą:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_{1,2} &= \frac{-102 + 255}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-102 - 255}{2}\right)^2 + 148,5^2} = 76,5 \pm 232,2 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Zgodnie z umową $\sigma_1 = 308,7 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -155,7 \text{ MPa}$. Do sprawdzenia poprawności wyników można wykorzystać związek

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = 153 \text{ MPa}.$$

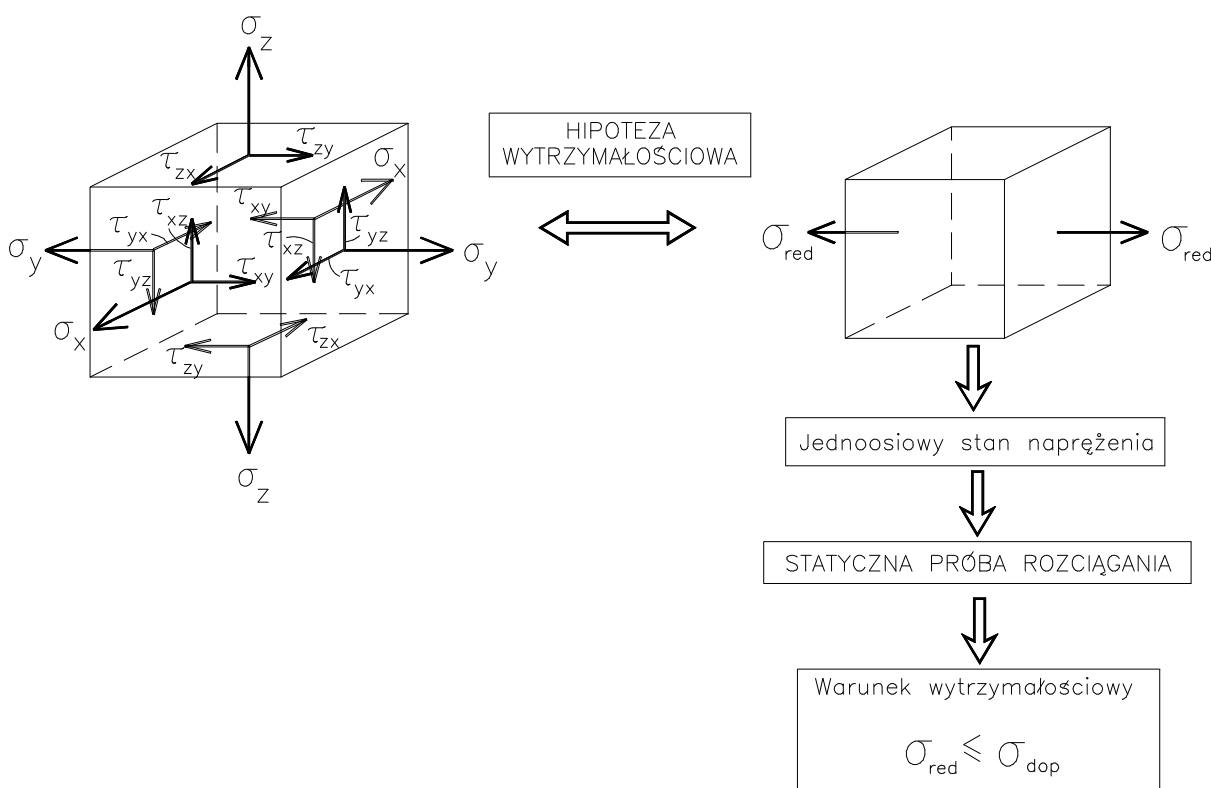
Przedstawiony przykład ma znaczenie praktyczne – dzięki pomiarom tensometrycznym odkształceń można określić doświadczalnie wartości naprężeń w niebezpiecznych punktach konstrukcji i porównać je z wynikami obliczeń numerycznych.

HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE

W praktyce inżynierskiej występują złożone stany naprężenia, będące kombinacją naprężeń normalnych i stycznych. Przyjęcie **hipotezy wytrzymałościowej** umożliwia znalezienie matematycznej funkcji pozwalającej na zastąpienie złożonego, przestrzennego stanu naprężenia przez stan jednoosiowego rozciągania, dokładnie opisany przez **statyczną próbę rozciągania**. Dzięki temu w obliczeniach wytrzymałościowych można wykorzystać **warunek wytrzymałościowy**:

$$\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{nieb.}}}{n}$$

Ideę obliczeń wytrzymałościowych opartą na naprężeniach zredukowanych pokazano na rysunku.



Obecnie znanych jest kilkadziesiąt hipotez wytrzymałościowych. Niektóre z nich mają już tylko znaczenie historyczne, inne nie są dostatecznie potwierdzone przez doświadczenie, jeszcze inne są bardzo wyspecjalizowane i przeznaczone do wąskiej klasy zagadnień wytrzymałościowych.

Spośród hipotez ogólnych, dających wyniki zgodne z doświadczeniem, należy wymienić **hipotezę energii odkształcenia postaciowego** (hipotezę Hubera).

Maksymilian Tytus **Huber** (1872-1950) polski uczonek, współtwórca współczesnej mechaniki teoretycznej, profesor Politechniki Lwowskiej, Politechniki Warszawskiej i po II Wojnie Światowej Politechniki Gdańskiej.

Hipoteza ta należy do licznej grupy tzw. hipotez energetycznych. Twórcy hipotezy (Huber 1904, Mises 1913, Hencky 1925) przyjęli, że miarą wyężenia materiału jest wartość **energii sprężystej odkształcenia postaciowego**.

Dla przypadku jednoczesnego występowania naprężeń normalnych i stycznych (zginanie belek), naprężenia zredukowane zastępujące ten złożony stan naprężenia oblicza się z zależności:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Hipoteza Hubera (Hubera – Misesa – Hencky'go) jest potwierdzona doświadczalnie i jest obecnie bardzo szeroko stosowana w praktyce inżynierskiej.